

# 信号相位匹配原理的正弦信号 参数的最小二乘估计<sup>\*</sup>

孙进才 朱维杰 孙轶源 刘 理

西北工业大学航海工程学院, 西安 710072

**摘要** 根据信号相位匹配原理, 提出了一种正弦信号频率、振幅和相位参数的最小二乘估计方法. 推导了利用单传感器接收信号的参数估计的最小二乘估计计算公式, 给出了已知频带内的未知频率, 振幅和相位的信号参数估计的搜索算法. 分析了最小二乘法使用的方程数、信噪比和采样频率确定后 FFT 的序列长度对参数估计精度的影响. 理论和仿真结果说明, 该方法不仅能降低估计频率带宽以外的噪声, 而且还可降低被估计频率信号带宽内的噪声, 提高了低信噪比时的信号参数估计精度. 该算法简单、快速, 具有工程应用前景.

**关键词** 信号相位匹配原理 最小二乘估计 参数估计 正弦信号

正弦信号参数估计在雷达、声纳、通信中应用广泛, 在信号检测、目标参数识别中也具有重要的应用价值<sup>[1~3]</sup>. 经典信号估计理论的参数估计方法需要待估计参数的先验概率密度函数, 似然函数和代价函数知识<sup>[1]</sup>. 对于 Gauss 白噪声中的单个正弦信号, 如果能够估计出信号频率, 利用最大似然估计可得到信号的振幅和相位. 但是如果噪声中存在多个正弦信号, 为了求得似然函数的极大值, 需要进行  $P$  维空间搜索, 即使利用优化迭代算法, 也只有在一些特殊情况下才能收敛于全局极大<sup>[2]</sup>. 利用 Gauss 统计量的特征分析技术的正弦参数估计的计算量大<sup>[4,5]</sup>. 樊养余等<sup>[6,7]</sup>提出的基于双谱的谐波信号重构及相位重构算法解决了文献[8, 9]中利用双谱重构谐波时的相移问题, 同时使幅值的求解更为简单, 但是该方法的估计精度取决于 FFT 分析的分辨率, 而实际应用中需要较高的采样频率使频率分辨率低而影响估计精度. 基于 FFT 局部频率细化的 ZoomFFT 方法可以同时估计信号的频率、振幅和相

位, 但通常需要经过频移、滤波、重采样和加权修正等步骤, 算法复杂运算量大. 文献[10]提出的 ZoomFFT 简化算法也需要较长的数据序列才能满足分辨率的要求. 文献[11]提出了一种利用信号相位匹配原理的正弦参数估计方法, 只要对单传感器接收信号依次延迟  $\tau$  获得三个序列, 通过不同搜索频率的相位补偿估计信号的频率、幅值和相位, 频率分辨率决定于搜索步长而不受数据长度限制, 方法简单, 计算量小, 适合工程应用, 但噪声经 FFT 分析后在每一个频点上不能保证一定满足“不同相”的要求, 另三个序列中有两个序列的噪声“同相”或接近“同相”时, 该搜索频点将出现奇异峰值, 在低信噪比条件下尤为严重.

本文提出一种将三段序列扩展为  $M$  段序列的信号相位匹配原理的正弦参数最小二乘估计方法, 它既可消除估计信号中的“奇异峰”, 还可部分消除噪声对被估计信号的影响, 从而提高了低信噪比情况下的正弦信号参数估计精度.

2004-01-09 收稿, 2004-03-26 收修改稿

\* 国家自然科学基金(批准号: 60272077), 航空科学基金(批准号: 02F53030)和陕西省自然科学基金(批准号: 2002F17)资助项目

©mail:jcsu@nwpu.edu.cn

2194-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

### 1 确知频率时的正弦参数最小二乘估计

设传感器的接收信号为数字信号  $p(n)$ , 信号与噪声是线性可加的, 依次取相隔时间为  $\tau$  ( $\tau = 1/f_s$ ,  $f_s$  为采样频率) 的  $M$  段长度为  $N$  的信号得

$$p_m(i) = s[i + (m - 1)\tau] + n[i + (m - 1)\tau], \quad (1)$$

其中  $i=0, 1, 2, \dots, N-1, m=1, 2, \dots, M$ ,  $s(i)$  为单频正弦信号,  $n(i)$  为 Gauss 白噪声. 对(1)式作离散 Fourier 变换得

$$P_m(k) = S_m(k) + N_m(k). \quad (2)$$

根据文献[11, 12] 证明结果, 对于信号有以下关系

$$S_m(k) = S_1(k) W_N^{-(m-1)k} + S'_m(k), \quad (3)$$

当  $N \gg M$  时, 有

$$|S'_m(k)| / |S_1(k)| \leq \frac{2m}{N}. \quad (4)$$

$S'_m$  和  $S$  之间的相位差满足

$$\Delta\theta \cong \frac{2m}{N} \ll 1, \quad (5)$$

式中  $m=1, 2, 3, \dots, M$ .

一般取 FFT 的样本长度  $N$  远大于方程组数  $M$ , 忽略  $S'_m(k)$  对估计信号  $S_1(k)$  的影响, 方程(2)可以改写为

$$P_m(k) = S_1(k) W_N^{-(m-1)k} + N_m(k). \quad (6)$$

若已知信号频率为  $k_0$  时, 根据信号相位匹配原理<sup>[13, 14]</sup>, 用  $W_N^{(m-1)k_0}$  乘(6)式两边,  $m=1, 2, 3, \dots, M$ , 当  $k=k_0$  时方程(6)变为

$$P_m(k_0) W_N^{(m-1)k_0} = S_1(k_0) + N_m(k_0), \quad (7)$$

设  $P'_m(k_0) = P_m(k_0) W_N^{(m-1)k_0}$ ,  $m=1, 2, 3, \dots, M$ . 将(7)式右边的  $S_1(k_0)$  移至左边, 然后求模的平方得(为简便, 省去括号中的  $k_0$ )

$$|P'_m|^2 + |S_1|^2 - 2\text{Re}(P'_m)\text{Re}(S_1) - 2\text{Im}(P'_m)\text{Im}(S_1) = |N_m|^2. \quad (8)$$

用(8)式中  $m=1$  时的式两边依次减  $m=2, 3, \dots, M$  时式的两边得  $(M-1)$  个线性方程,

$$2\text{Re}(P'_1 - P'_k)\text{Re}S_1 + 2\text{Im}(P'_1 - P'_k)\text{Im}(S_1) = (|P_1|^2 - |P_k|^2) + (|N_1|^2 - |N_k|^2), \quad (9)$$

式中  $k=2, 3, \dots, M$ ,  $\text{Re}$  和  $\text{Im}$  分别表示取复数的实部与虚部.

因为对于噪声序列  $N$  个数据中最多有  $M$  个数据不同, 当  $N \gg M$  时, (9)式右边第二项是小量, 但不为零, 因此方程(9)是一组超定方程, 我们对  $(M-1)$  个方程采用最小二乘的方法求解两个未知数  $\text{Re}S_1$  和  $\text{Im}S_1$ , 这样求解期望信号  $S_1$  是均方误差最小意义下的解, 在方程(9)推导过程中, 忽略了  $S'_m(k)$  的影响, 因此估计是有偏的. 将方程(9)写成矩阵形式

$$A \cdot S = P + \epsilon, \quad (10)$$

式中

$$A = 2 \cdot \begin{bmatrix} \text{Re}(P'_1 - P'_2) & \text{Im}(P'_1 - P'_2) \\ \text{Re}(P'_1 - P'_3) & \text{Im}(P'_1 - P'_3) \\ \vdots & \vdots \\ \text{Re}(P'_1 - P'_M) & \text{Im}(P'_1 - P'_M) \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} \text{Re}S_1 \\ \text{Im}S_1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} |P_1|^2 - |P_2|^2, |P_1|^2 - |P_3|^2 \dots \\ |P_1|^2 - |P_M|^2 \end{bmatrix}^T,$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} |N_1|^2 - |N_2|^2, |N_1|^2 - |N_3|^2 \dots \\ |N_1|^2 - |N_M|^2 \end{bmatrix}^T,$$

那么期望信号  $S_1$  的最小二乘解为

$$S = A^+ P, \quad (11)$$

式中  $A^+$  表示矩阵  $A$  的 Moore-Penrose 广义逆。

由(11)式求得期望信号  $S_1$  后, 可求得信号的幅度和相位为

$$A(f_0) = \left[ (\operatorname{Re} S_1)^2 + (\operatorname{Im} S_1)^2 \right]^{1/2}, \quad (12)$$

$$\varphi(f_0) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im} S_1}{\operatorname{Re} S_1}. \quad (13)$$

## 2 已知频带内未知频率、幅值和相位的信号参数估计

当正弦信号的频率、幅度和相位均未知时, 就不能用上节的方法来进行参数估计. 但通过搜索算法可实现正弦信号的频率、幅度和相位参数估计.

设信号位于  $k_l \sim k_h$  频率带宽内,  $k_l$  为下限频率,  $k_h$  为上限频率, 设频率搜索的步长为  $\Delta k$ , 那么搜索次数  $l = (k_h - k_l) / \Delta k$ . 用  $W_N^{(m-1)[(n-1)\Delta k + k_l]}$  分别乘(6)式, 得

$$P_m'(k) = P_m(k) W_N^{(m-1)[(n-1)\Delta k + k_l]}, \quad (14)$$

式中  $m=1, 2, 3, \dots, M, n=1, 2, 3, \dots, l+1$ .

利用公式(11)可求得频率为  $[(n-1)\Delta k + k_l]$  时的“信号”的实部与虚部  $\operatorname{Re} S_1[(n-1)\Delta k + k_l]$  和  $\operatorname{Im} S_1[(n-1)\Delta k + k_l]$ , 用公式(12)和(13)可求得幅值与相位. 根据信号相位匹配原理, 只有当搜索频率  $[(n-1)\Delta k + k_l]$  为期望信号频率  $k_0$  时, 其幅

值为最大. 因此可以在频率~幅值曲线图上找到最大值对应的搜索次数  $n_{\max}$ . 由此求确定期望信号的频率、幅度和相位.

$$f = \frac{f_s}{N} [(n_{\max} - 1)\Delta k + k_l], \quad (15)$$

$$A = \left[ \left\{ \operatorname{Re} S_1 [(n_{\max} - 1)\Delta k + k_l] \right\}^2 + \left\{ \operatorname{Im} S_1 [(n_{\max} - 1)\Delta k + k_l] \right\}^2 \right]^{1/2}, \quad (16)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im} S_1 [(n_{\max} - 1)\Delta k + k_l]}{\operatorname{Re} S_1 [(n_{\max} - 1)\Delta k + k_l]}. \quad (17)$$

## 3 仿真及分析

### 3.1 方程数 $M$ 对参数估计精度的影响

首先研究了用最小二乘法估计正弦信号参数时的方程数  $M$  对参数估计精度的影响. 表 1 给出了  $S/N = -10$  dB, FFT 序列长度  $N = 1024$ , 不同  $M$  时估计正弦信号频率  $f_0$ , 归一化幅值  $A_0$  和相位  $\varphi_0$  的 100 次估计的平均值, 偏差和方差. 本文仿真的参数如下: 正弦信号的频率  $f_0 = 1500$  Hz, 采样频率  $f_s = 9000$  Hz, 搜索频率间隔  $\Delta f = 4$  Hz. 搜索的频率范围是 1450~1550 Hz. 信噪比  $S/N$  定义为分析带宽内信号功率与噪声功率的比值的分贝数. 噪声为 Gauss 白噪声. 表 1 分别给出了经 100 次平均后的信号的估计频率、幅值和相位均值、偏差和均方差随方程数  $M$  的变化.

表 1 方程数  $M$  对参数估计精度的影响

$M$	$\bar{f}/\text{Hz}$	$\bar{A}$	$\bar{\theta}$	$\Delta f/\text{Hz}$	$\Delta A$	$\Delta \theta$	$\sigma_f/\text{Hz}$	$\sigma_A$	$\sigma_\theta$
3	1498.8	3.6145	0.6966	1.16	-2.6145	0.3034	15.375	27.2059	0.8349
4	1500.0	1.0284	0.9936	-0.02	-0.0248	0.0064	0.4743	0.0899	0.0504
5	1500.0	1.0038	1.0070	0.00	-0.0038	-0.0070	0.0000	0.0734	0.0527
6	1500.0	1.0207	0.9717	0.00	-0.0207	0.0283	0.0000	0.0698	0.0503
8	1500.0	1.0373	0.9741	0.00	-0.0373	0.0259	0.0000	0.0702	0.0500
10	1500.0	1.0292	0.9966	0.00	-0.0292	0.0034	0.0000	0.0761	0.0510
12	1500.0	0.9780	0.9653	0.00	0.0220	0.0347	0.0000	0.0778	0.0543
14	1500.0	0.9838	1.0014	0.00	0.0162	-0.0014	0.0000	0.0752	0.0531
16	1500.0	1.0347	0.9596	0.00	-0.0347	0.0404	0.0000	0.0805	0.0559
18	1500.0	0.9545	0.9969	0.00	0.0455	0.0031	0.0000	0.0750	0.0526
20	1500.0	0.9768	0.9876	0.00	0.0232	0.0124	0.0000	0.0707	0.0560

由表 1 可见, 参数估计的方差随着  $M$  的增大而减小, 但当  $M \geq 14$  时, 方差反而增大. 可能的原因是在(6)式中, 忽略了信号的小项  $S_m'(k)$  的影响(见(4)式), 因为这项是随  $M$  的增大而变大的. 因此利用最小二乘估计正弦信号参数时,  $M$  数取 8~12 也许是合适的. 这样

既可以用较少的计算时间, 又可以保证估计精度. 显然在这样条件下比用  $M=3$  或文献[1]解方程的估计方法的精度要高, 本文中  $M=3$  时是在均方误差最小意义下的解, 因此比文献[1]的直接解方程方法估计精度要高一些(见文献[1]中表 1), 特别是对相位估计的精度.

### 3.2 信噪比对参数估计精度的影响

利用 3.1 中的仿真参数, 但取  $N=2048$ ,  $M=12$ , 研究了不同输入信噪比对信号参数估计的影响. 表 2 中给出了经 100 次平均后的信号频率、幅

值和相位的均值、偏差和均方差的结果. 由表 2 可见, 当  $N$  一定时, 随着信噪比的下降, 信号估计频率、幅值和相位的均方差随之增加, 但当  $S/N=-20$  dB 时, 平均值仍在可接受的范围内.

表 2 输入信噪比对参数估计精度的影响

$(S/N)/\text{dB}$	$\bar{f}/\text{Hz}$	$\bar{A}$	$\bar{\theta}$	$\Delta f/\text{Hz}$	$\Delta A$	$\Delta \theta$	$\sigma_f/\text{Hz}$	$\sigma_A$	$\sigma_\theta$
10	1500.0	1.000	0.9928	0.0	0.0000	0.0072	0.0	0.0087	0.0059
5	1500.0	0.9949	0.9909	0.0	0.0051	0.0091	0.0	0.0134	0.0098
0	1500.0	1.0052	0.9914	0.0	-0.0052	0.0086	0.0	0.0262	0.0180
-5	1500.0	1.0031	0.9931	0.0	-0.0031	0.0069	0.0	0.0430	0.0274
-10	1500.0	1.0355	0.9836	0.0	-0.0355	0.0164	0.0	0.0749	0.0484
-15	1500.0	1.0291	1.0059	0.0	-0.0291	-0.0159	0.0	0.1502	0.0893
-20	1499.6	0.9518	0.6116	0.4	0.0482	0.3884	13.5	0.1965	1.0495

### 3.3 序列长度 $N$ 不同对参数估计精度的影响

除  $S/N=-10$  dB,  $M=12$  外, 其他仿真参数与 3.1 中相同. 表 3 给出了 FFT 序列长度  $N$  不同时, 对参数估计精度的影响. 由表 3 可见, 参数估计方差随  $N$  增大而减小, 原因是随着  $N$  的增大,

FFT 分析的分辨率越高, 因此估计精度越高, 但计算时间亦增加. 因此利用本文方法进行参数估计时, 必须在估计精度, 计算时间之间作适当选择.

图 1 中分别给出了信噪比  $S/N=-20$  dB 情况下的信号、噪声频谱、参数估计搜索结果和信号加

表 3  $N$  不同时对参数估计精度的影响

$N$	$\bar{f}/\text{Hz}$	$\bar{A}$	$\bar{\theta}$	$\Delta f/\text{Hz}$	$\Delta A$	$\Delta \theta$	$\sigma_f/\text{Hz}$	$\sigma_A$	$\sigma_\theta$
512	1490	0.9461	0.9640	10	0.0539	0.0360	0	0.1416	0.1233
1024	1500	1.0241	1.0121	0	-0.0241	-0.0121	0	0.1194	0.0822
2048	1500	0.9965	0.9999	0	0.0035	0.0001	0	0.0828	0.0510
4096	1500	1.0026	0.9891	0	-0.0026	0.0009	0	0.0504	0.0350
8192	1500	0.9977	1.0018	0	0.0023	-0.0018	0	0.0339	0.0254

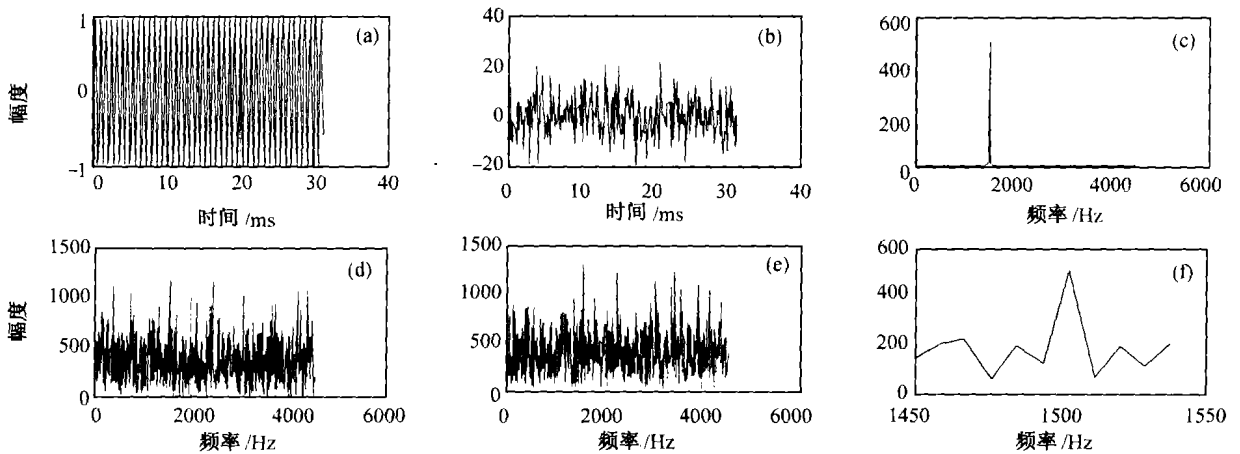


图 1  $S/N=-20$  dB 情况下的谱图

(a) 信号; (b) 噪声; (c) 信号谱; (d) 噪声谱; (e) 信号加噪声谱; (f) 搜索谱

噪声频谱图.

由图 1 可见, 即使在低信噪比的情况下, 依然可以估计出信号的频率、幅值和相位.

## 4 结论

本文提出了利用相位匹配原理估计正弦参数的

最小二乘法, 其估计精度优于信号相位匹配参数估计的直接算法. 本文方法实现参数估计时, 不仅可以消除直接法引起的奇异峰现象, 同时还可以部分消除信号带宽内的噪声影响. 它无需估计参量的先验概率密度函数或最大似然数, 且只需一次观察就可实现信号频率、幅值和相位估计. 仿真结果证实了该方法的正确性, 有效性, 同时亦指出估计精度的要求, 必须在方程数, FFT 序列长度和计算时间之间作适当选择.

### 参 考 文 献

- 刘有恒. 信号检测与估计. 北京: 人民邮电出版社, 1989
- Kay S M 著. 黄建国, 等译. 现代谱估计与应用. 北京: 科学出版社, 1994
- 张贤达. 现代信号处理. 北京: 清华大学出版社, 1995
- Owsky N L. Sonar array processing. In: Array Signal Processing. Hay kin S, et al. eds. Englewood; Prentice-Hall, 1985
- 张贤达. 时间序列分析—高价统计量法. 北京: 清华大学出版社, 1996
- 樊养余, 等. 基于双谱的谐波信号重构. 声学学报, 1999, 24(4): 416
- 樊养余, 等. 基于双谱的谐波信号相位重构. 信号处理, 2000, 16(1): 1
- Lii K S, et al. Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-Gaussian linear processes. Ann Statist, 1982, 10: 1195
- Matsuoka T, et al. Phase estimation using the bispectrum. IEEE, 1984, 72: 1403
- 李启虎, 等. 数字式声纳中的一种简化的 ZoomFFT 算法. 声学学报, 2000, 25(2): 129
- 孙轶源, 等. 利用信号相位匹配原理的正弦参数估计. 自然科学进展, 2001, 11(11): 1216
- Zhu W J, et al. Parameter estimation of sinusoidal signals by using principle of signal matched-phase. Progress in Natural Science, 2002, 12(4): 301
- 孙进才, 等. 利用三元阵的相干干扰抵消原理及仿真研究. 声学学报, 2001, 26(6): 537
- Zhu W J, et al. Principle and simulation of coherent interference suppression by a three-sensor array. Chinese Journal of Acoustics, 2002, 21(2): 110

环境/生态学 1993—2003 年被引频率位列前 20 位的期刊

排序	期刊名称	论文数	总被引	平均被引
1	Ecology	2744	61340	22.35
2	Ecol Appl	1306	21616	16.55
3	J Ecol	949	15678	16.52
4	Environ Health Perspect	3604	48523	13.46
5	Oecologia	3218	42884	13.33
6	Glob Change Biol	709	9244	13.04
7	OIKOS	2404	31293	13.02
8	Funct Ecol	1095	13640	12.46
9	Mol Ecol	2101	26136	12.44
10	Mar Ecol Progr Ser	4729	58530	12.38
11	Water Resour Res	3499	36591	10.46
12	Soil Biol Biochem	2569	26146	10.18
13	J Environ Qual	2296	21823	9.50
14	Water Res	4689	33450	7.13
15	Environ Pollut	2260	15951	7.06
16	Water Air Soil Pollut	3162	16864	5.33
17	Ecol Model	2035	10804	5.31
18	Forest Ecol Manage	3186	16502	5.18
19	Bull Environ Contam Toxicol	2947	9261	3.14
20	Environ Toxicol Chem	3474	34691	9.99

(摘自《英语科技论文撰写与投稿》)